

## 1 Užduotys savarankiškam darbui (3 dalis)

1. Patikrinkite, ar duotos funkcijos yra duotų diferencialinių lygčių sprendiniai:

1)

$$y = Cx, y'x - y = 0,$$

2)

$$y = \sin x, y' - y = 0,$$

3)

$$y = x^3 + C, y' = 3x^2,$$

4)

$$y = \sqrt{x^2 + C}, yy' = x,$$

5)

$$y = Cx^3, 3y - xy' = 0,$$

6)

$$y = \frac{C}{\cos x}, y' - \operatorname{tg}xy = 0,$$

7)

$$y = x + Ce^y, (x - y + 1)y' = 1,$$

8)

$$y = e^{\arcsin Cx}, xy' = y \operatorname{tg} \ln y,$$

9)

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}, y' - y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

2. Sudarykite kreivių šeimos diferencialinę lygtį:

1)

$$(x - C)^2 + y^2 = 1,$$

2)

$$y = Cx,$$

3)

$$y = x^2 + Cx,$$

4)

$$Cy = x^2 + y^2,$$

5)

$$y = Ce^{2x},$$

6)

$$y = Cx + C^2,$$

7)

$$y^2 = 2Cx,$$

8)

$$y = \sqrt{1 - x^2} + C,$$

9)

$$y = \sin Cx,$$

10)

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

11)

$$\ln \frac{x}{y} = 1 + Cy.$$

3. Raskite izoklines ir nubraižykite krypčių lauką:

1)

$$y' = \frac{2y}{x},$$

2)

$$y' = x,$$

3)

$$y' = 1 + y^2,$$

4)

$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

5)

$$y' = 2x - y,$$

6)

$$y' = x + 1,$$

7)

$$y' = \frac{y + 1}{x - 1}.$$

4. Kintamųjų atskyrimo metodu išspręskite diferencialines lygtis:

1)

$$y' = -x,$$

2)

$$xy' = y^3 + y,$$

3)

$$xyy' = 1 - x^2,$$

4)

$$y'tgx = y,$$

5)

$$y' \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

6)

$$xy' - y = 0, y(-2) = 4,$$

7)

$$xy' + y = 0, y(-2) = 4,$$

8)

$$yy' + x = 0, y(-2) = 4,$$

9)

$$y' = y, y(-2) = 4,$$

10)

$$x^2y' + y = 0,$$

11)

$$x + xy + y'(y + xy) = 0,$$

12)

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0,$$

13)

$$2y'\sqrt{x} = y, y(4) = 1,$$

14)

$$xy' = \frac{y}{\ln x}, y(e) = 1,$$

15)

$$x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1,$$

16)

$$2\sqrt{y}dx = dy, y(0) = 1,$$

17)

$$(2x + 1)dy + y^2dx = 0, y(4) = 1.$$

5. Išspręskite homogenines diferencialines lygtis:

1)

$$y' = \frac{y}{x} - 1,$$

2)

$$y' = -\frac{x + y}{x},$$

3)

$$(x - y)ydx - x^2dy = 0,$$

4)

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx,$$

5)

$$ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0,$$

6)

$$y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x},$$

7)

$$(7x^2 - 2xy + 6y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy = 0,$$

8)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

6. Išspręskite lygtis su pilnaisiais diferencialais (jei reikia, nustatykite integruojantį daugiklį):

1)

$$(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0,$$

2)

$$xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

3)

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0,$$

4)

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$$

7. Išspręskite tiesines lygtis:

1)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \frac{x}{2},$$

2)

$$y' - yctgx = a \sin x,$$

3)

$$y' = ytgx + \cos x,$$

4)

$$y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0.$$

8. Išspręskite Bernulio lygtis:

1)

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{2x}{y},$$

2)

$$y' - \frac{3}{x}y = -x^3y^2.$$

9. Išspręskite tiesines homogenines aukštesnių eilių diferencialines lygtis:

1)

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

2)

$$y'' - 9y = 0,$$

3)

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

4)

$$y = y'' + y',$$

5)

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

6)

$$y'' + 4y' + 13y = 0,$$

7)

$$y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0,$$

8)

$$y'' - ky' = 0, k \neq 0,$$

9)

$$y'' - 4y' = 0,$$

10)

$$y'' + 2ay' + a^2y = 0,$$

11)

$$y''' - 13y'' + 12y' = 0,$$

12)

$$y''' + y = 0,$$

13)

$$y^{IV} - 2y'' = 0,$$

14)

$$y^{IV} + 8y'' + 16y = 0,$$

15)

$$y^{IV} + 2y''' + y'' = 0.$$

10. Nustatykite tiesinių nehomogeninių aukštesnių eilių diferencialinių lygtčių atskirojo sprendinio pavidalą:

1)

$$y'' + y = \sin x,$$

2)

$$y'' + y = \sin 2x,$$

3)

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x,$$

4)

$$y'' - 2y' + y = \sin x,$$

5)

$$y'' + 16y = 17e^{-x},$$

6)

$$y'' + 4y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 1,$$

7)

$$y'' - 4y' + 4y = x^2,$$

8)

$$y'' - y = 1 + xe^x + e^x \cos x,$$

9)

$$y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x,$$

10)

$$y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x).$$

11. Išspręskite tiesines nehomogenines aukštesnių eilių diferencialines lygtis:

1)

$$y'' + y = \sin x,$$

2)

$$y'' + y = \sin 2x,$$

3)

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x,$$

4)

$$y'' - 2y' + y = \sin x,$$

5)

$$y'' + 16y = 17e^{-x},$$

6)

$$y'' + 4y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 1,$$

7)

$$y'' - 4y' + 4y = x^2,$$

8)

$$y'' - y = 1 + xe^x + e^x \cos x,$$

9)

$$y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x,$$

10)

$$y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x),$$

11)

$$y''' + y'' + y' + y = xe^x.$$

ATSAKYMAI

- 1.** 1) taip, 2) ne, 3) taip, 4) taip, 5) taip, 6) taip, 7) taip, 8) taip, 9) ne. **2.** 1)  $y^2(y')^2 + y^2 = 1$ , 2)  $y'x - y = 0$ , 3)  $y'x - y = x^2$ , 4)  $y'(x^2 - y^2) = 2xy$ , 5)  $y' = 2y$ , 6)  $y = xy' + (y')^2$ , 7)  $y = 2xy'$ , 8)  $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 9)  $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \arcsin y$ , 10)  $-xyy' + y^2 = 4$ , 11)  $y' \ln \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$ .
- 4.** 2)  $x = \frac{Cy}{\sqrt{y^2+1}}$ , 3)  $x^2 + y^2 = \ln |Cx^2|$ , 4)  $y = C \sin x$ , 5)  $y = 1$ , 6)  $y = -2x$ , 7)  $xy = -8$ , 8)  $x^2 + y^2 = 20$ , 9)  $y = 4e^{x+2}$ , 10)  $y = Ce^{\frac{1}{x}}$ , 11)  $x + y = \ln |C(x+1)(y+1)|$ , 12)  $1y^2 = C(1-x^2)$ , 13)  $y = e^{\sqrt{x-2}}$ , 14)  $y = \ln x$ , 15)  $y = -x$ , 16)  $y = (x+1)^2$ , 17)  $\ln |\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}| = 2(\frac{1}{y} - 1)$ .
- 5.** 1)  $y = x \ln \frac{C}{x}$ , 2)  $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$ , 3)  $x = Ce^{\frac{x}{y}}$ , 4)  $y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$ , 5)  $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln |y| = C$ , 6)  $\sin \frac{y}{x} = Cx$ , 7)  $2y^2 - xy + 7x^2 = Cx^3$ , 8)  $x(C(x^2 + y^2) - y) = 0$ .
- 6.** 1)  $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$ , 2)  $x^2 + y^2 - 2 \arctg \frac{y}{x} = C$ , 3)  $\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$ , 4)  $\frac{x^3}{3} + y^2x + x^2 = C$ .
- 7.** 1)  $y = \frac{1}{2}x^2 \ln |x| + Cx^2$ , 2)  $y = (ax + C) \sin x$ , 3)  $y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C) \frac{1}{\cos x}$ , 4)  $y = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .
- 8.** 1)  $y = \pm x\sqrt{4 \ln |x| + C}$ , 2)  $\frac{1}{y} = \frac{x^4}{7} + \frac{C}{x^3}$ ,  $y = 0$ .
- 9.** 1)  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ , 2)  $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$ , 3)  $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ , 4)  $y = C_1e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + C_2e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$ , 5)  $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ , 6)  $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ , 7)  $y = 0$ , 8)  $y = C_1e^{-\sqrt{k}x} + C_2e^{\sqrt{k}x}$ ,  $k \geq 0$ ,  $y = \cos \sqrt{-k}x + \sin \sqrt{-k}x$ ,  $k < 0$ , 9)  $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$ , 10)  $y = (C_1x + C_2)e^{ax}$ , 11)  $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}$ , 12)  $y = C_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$ , 13)  $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x\sqrt{2}} + C_4e^{-x\sqrt{2}}$ , 14)  $y = (C_1 + C_2x) \cos 2x + (C_3 + C_4x) \sin 2x$ , 15)  $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$ .
- 10.** 1)  $y = (A \cos x + B \sin x)x$ , 2)  $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)x$ , 3)  $y = (Ax + B)xe^x$ , 4)  $y = A \sin x + B \cos x$ , 5)  $y = Ae^{-x}$ , 6)  $y = (A \sin 2x + B \cos 2x)x + C$ , 7)  $y = Ax^2 + Bx + C$ , 8)  $y = A + (Bx + C)xe^x + e^x(D \sin x + E \cos x)$ , 9)  $y = (Ax + B)e^{-3x}x + (Cx + D)xe^x$ , 10)  $y = (Ax + B)e^x \cos x + (Cx + D)e^x \sin x$ .
- 11.** 1)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$ , 2)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$ , 3)  $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$ , 4)  $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2} \cos x$ , 5)  $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + e^{-x}$ , 6)  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4}(3 \sin 2x + 2 \cos 2x)x + \frac{1}{4}$ , 7)  $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$ , 8)  $y = C_1e^x + C_2xe^{-x} + \frac{1}{4}xe^x(x-1) + \frac{1}{3}e^x(2 \sin x + \cos x) - 1$ , 11)  $y = C_1e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + e^x(\frac{x}{4} - \frac{3}{8})$ .