14 Chaosas tolydžiosiose ir diskrečiosiose dinaminėse sistemose

14.1 Chaosas tolydžiosiose dinaminėse sistemose. Lorenco sistemos tyrimas

Pradžioje panagrinėkime tolydžiąją dinaminę sistemą, kurioje susiduriame su chaoso elementais. Tai – 1963 m. sudaryta Lorenco sistema, atspindinti supaprastintą konvekcijos modelį. Tos pačios lygtys gali būti taikomos ir lazerių modeliavimui. Nagrinėkime minėtąją Lorenco sistemą:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = rx - y - xz, \qquad \sigma > 0,\ r > 0,\ b > 0. \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

Iš pažiūros tokia paprasta sistema iš tikrųjų modeliuoja įdomų procesą. Šios sistemos sprendiniai reguliariai osciliuoja ir niekada negrįžta į tą patį tašką, tačiau visą laiką išlieka tam tikroje fazinės erdvės srityje. Taip nutinka dėl to, kad ši sistema yra veikiama stipraus atraktoriaus (vėliau griežtai apibrėšime šią sąvoką), kuris nėra nagrinėjamos sistemos ramybės taškas ar ribinis ciklas. Šio modelio atraktorius yra fraktalas, kurio fraktalinė dimensija yra nustatyta skaitiniais eksperimentais ir yra lygi 2,05. Siekdami suprasti tokį atraktorių atliksime dinaminės sistemos analizę. Nustatome Lorenco sistemos ramybės taškus:

$$(0,0,0),\ (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

ir pažymime

$$C^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1),\ C^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Atlikę Lorenco sistemos linearizaciją (atmesdami netiesinių narių įtaką)

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = rx - y, \\ z' = -bz \end{cases}$$

patebime, kad paskutinė sistemos lygtis rodo tai, kad sprendinio komponentė $z(t) \to 0$ eksponentiniu greičiu. Tuomet likusioms dviems kryptims turime tokią sistemą:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = rx - y, \end{cases}$$

kurios pėdsakas $\tau = -\sigma - 1 < 0$, o determinanatas $\Delta = \sigma(1-r)$. Tokiu būdu, kai $r > 1$, tai $\Delta < 0$ ir turime, kad ramybės taškas $(0,0,0)$ yra balnas. Kai $r < 1$, tai ramybės taškas $(0,0,0)$ yra stabilusis mazgas ($D > 0$). Todėl, kai $r < 1$, tai bėgant laikui visos trajektorijos pasieks ramybės tašką $(0,0,0)$. Šiuo atveju taškas $(0,0,0)$ yra globaliai stabilus ir dinaminėje sistemoje, kai $r < 1$, neatsiras jokių ribinių ciklų ar chaoso elementų.

Kai $r > 1$, tai greta balno taško $(0,0,0)$ turime dar du ramybės taškus C^+, C^-. Šių taškų stabilumui tirti sudarome pradinės dinaminės sistemos Žordano matricą

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & \text{-1} & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix},$$

kurios tikrinės reikšmės yra lygties

$$\lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

sprendiniai.

Kaip jau žinome, ramybės taškų stabilumo pasikeitimo priežastimi yra tikrinių reikšmių "perėjimas" iš kairiosios pusplokštumės į dešiniąją, t. y. Reλ ženklo pasikeitimas, todėl ieškodami tikrinių reikšmių, turinčių pavidalą $\pm\omega i$, surandame kritinę dinaminės sistemos parametro reikšmę

$$r_{krit} = \frac{\sigma(\sigma + 3 + b)}{\sigma - 1 - b},\ \sigma - 1 - b > 0.$$

Dabar galime tvirtinti, kad tuo atveju, kai $r > 1$, bet $r < r_{krit}$, tai ramybės taškai C^+ ir C^- yra stablieji, apgaubti vadinamuoju balno ciklu, kuris, kai $r \to r_{krit}$, traukiasi. Kai $r = r_{krit}$, tai sistemoje stebime Hopfo bifurkaciją, o kai r tampa didesnis už r_{krit}, tai Lorenco sistemos elgseną sunku numatyti, tačiau trajektorijos nėra nukreipiamos į begalybę. Judėjimas vyksta atraktoriuje. Toks judėjimas yra labai jautrus pradinėms sąlygoms. Trajektorijos, pradiniu laiko momentu buvę labai arti viena kitos, bėgant laikui elgiasi labai skirtingai. Skaitiniais eksperimentais yra nustatyta, kad Lorenco sistemos trajektorijos išsiskiria eksponentiniu greičiu

$$||\delta(t)|| \sim ||\delta_0||\mathrm{e}^{\lambda t},$$

čia δ_0 – pradinis atstumas tarp trajektorijų, o $\delta(t)$ – atstumas tarp trajektorijų laiko momentu t, λ – Liapunovo eksponentė. Skaitinių eksperimentų metu nustatyta, kad Lorenco sistemos Liapunovo eksponentė yra $\lambda = 0,9$. Dėl tokio trajektorijų išsiskyrimo ir tegiamos Liapunovo eksponentės įtakos egzistuoja tam tikras laiko horizontas, už kurio jokios prognozės nėra įmanomos. Lorenco sistemos laiko horizontas yra

$$t_{horiz} = \tau\frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{||\delta_0||}.$$

Dabar suformuluosime, kas yra būdinga chaosui, ir pateiksime griežtą atraktoriaus apibrėžimą.

Griežto chaoso apibrėžimo nėra, tačiau yra aišku, kas jam būdinga:

1) bėgant laikui trajektorijos neartėja nei prie ramybės taškų, nei prie periodinių orbitų,

2) dinaminė sistema neturi atsitiktinių narių, o nereguliarus elgesys kyla tik iš netiesinių sistemos narių,

3) sistema turi teigiamą Liapunovo eksponentę.

Atraktorius taip pat nėra lengvai apibrėžiamas.

14.1 Apibrėžimas. Atraktoriumi vadinama uždara aibė A, turinti šias savybes:

1) aibė A yra invariantinė,

2) aibė A pritraukia atvirą pradinių sąlygų aibę,

3) aibė A yra minimali.

Ar tam tikra aibė yra atraktorius, nevisada lengva patikrinti. Pavyzdžiui, mūsų plačiau aptartas Lorenco atraktorius turi tokią savybę, kad visos trajektorijos yra pritraukiamos tam tikros nenulinio tūrio aibės, tačiau nėra įrodymo, kad ta aibė tikrai yra atraktorius, tačiau visi tiki, kad taip yra. Jis vadinamas keistu atraktoriumi. Minėtasis atraktorius labai jautriai reaguoja į pradinių sąlygų pakeitimus.

14.2 Chaosas diskrečiosiose dinaminėse sistemose. Vienmačiai atvaizdai

Šiose sistemose laikas yra diskretusis. Tokias sistemas jau esate nagrinėję kitų studijų programos dalykų kursuose. Plačiau aptarsime vienmačių atvaizdų (diskrečiųjų dinaminių sistemų sudarytų iš vienos lygties dar kitaip vadinamų skirtuminėmis lygtimis) savybes ir analizės technikas.

Nagrinėkime vienmatį atvaizdą

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

čia $f(x_n)$ yra tolydžioji funkcija, o $x_i \in \mathcal{R}$, $f(x_i) \in \mathcal{R}$.

14.2 Apibrėžimas. Taškas x^*, tenkinantis sąlygą $f(x^*) = x^*$, vadinamas ramybės tašku.

Remiantis apibrėžimu akivaizdu, kad, jei $x_n = x^*$, tai ir $x_{n+1} = f(x^*) = x^*$, t. y. sprendinys pradedant x^* visą laiką toks ir išlieka.

Norėdami tirti ramybės taško stabilumą, nagrinėkime mažą ramybės taško sužadinimą, t. y. $x_n = \eta_n + x^*$ ir stebėkime, kas tada nutinka. Turime, kad $x_{n+1} = f(\eta_n + x^*)$. Funkciją $f(\eta_n + x^*)$ skleiskime Teiloro eilute taško x^* aplinkoje:

$$f(\eta_n + x^*) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2).$$

Tuomet

$$x_{n+1} = x^* + f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2)$$

arba

$$x_{n+1} - x^* = f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2).$$

Pažymime $\eta_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ ir gauname

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2).$$

Atsisakę antrosios eilės narių nagrinėjame skirtuminę lygtį

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n.$$

Pažymėję $f(x^*) = \lambda$, sudarome seką η_0, $\eta_1 = \lambda\eta_0$, $\eta_2 = \lambda^2\eta_0$, ..., $\eta_n = \lambda^n\eta_0$. Remdamiesi sekų ribų teorija žinome, kad ši seka konverguoja, jei $|\lambda| < 1$. Tuomet taškas x^* yra vadinamas stabiliuoju. Jei $|\lambda| > 1$, tai sudarytoji seka diverguoja ir taškas x^* yra vadinamas nestabiliuoju. Kadangi ši informacija apie stabilumą gaunama iš dinaminės sistemos linearizacijos, tai tuo atveju, kai $|\lambda| = 1$, į tyrimą turime įtraukti ir funkcijos skleidinio antrosios eilės narius. Šiuo atveju minėti nariai turi lemiamą įtaką.

Jei funkcijos $f(x_n)$ reikšmė ramybės taške x^* yra lygi nuliui, t. y. $|f(x^*)| = 0$, tai ramybės taškas x^* yra vadinamas superstabiliuoju.