Paskaita 7

-1-

Populiacijų modeliai

Derliaus gavimo valdymas.

Papildysime mūsų turėtą logistinį modelį:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$ papildomu

procesu – sveikiame pasiimti derlių

$E \cdot N$ (pvz. mitko kirtimas)

Gauname patikslintą modelį

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN$$

populiacijos narių mažėjimo greitis

Mūsų tikslas maksimizuoti pelną

$$EN \to max.$$

Atkreipiame dėmesį, kad $N = N(E)$.

ir $N'(E) < 0$ (didindami E, N mažėja, bet EN gali ir didėti)

Analizę pradėkime nuo stacionaraus sprendinio radimo ir gautojo stacionaraus sprendinio stabilumo analizės.

Stacionarus sprendinys.

$$\frac{dN}{dt} \equiv 0 \implies rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - EN = 0.$$

$$\boxed{N_s(E) = K\left(1-\frac{E}{r}\right)}$$

Matome, kad stacionarus sprendinys mažėja, ~~mažinant~~ didinant E.

Pelnas (derlius) (yield)

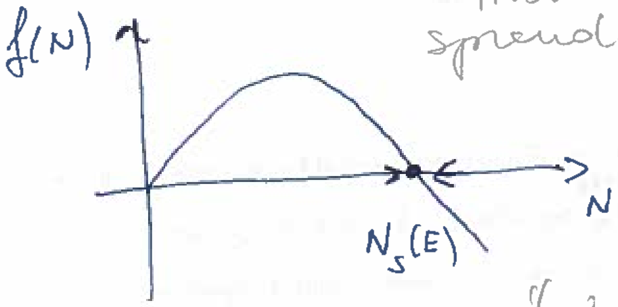
$$Y(E) = E N_s(E) = EK\left(1-\frac{E}{r}\right)$$

- Tik, kai $E < r$ gauname pelną
- $Y_{max}(\tilde{E}_{max}) = \frac{rK}{4}$, kai $\tilde{E}_{max} = \frac{r}{2}$

$$\boxed{N_s(\tilde{E}_{max}) = \frac{K}{2}}$$

{ Išnaudojame tik $\frac{1}{2}$ turimų resursų (protingas šeimininkas)

Tirsime gautojo stacionaraus sprendinio stabilumą:



Imkime f-ją, stacionaraus sprendinio aplinkoje mažėjančią (jeigu $f'(N)<0$) (sprendinys stabilus).

Nagrinėkime mūsų modelį:

$$f(N) = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - EN$$

$$f'(N) = r\left(1-\frac{2N}{K}\right) - E$$

$$f'(N_s) = r\left(1-2\left(1-\frac{E}{r}\right)\right) - E$$

$$= \underline{E-r}.$$

Taigi stacionarusis sprendinys yra stabilus ($f'(N_s)<0$), jei

$$\boxed{E < r.}$$

(prisiminsime, kad $\bar{E}_{max} = \frac{r}{2} < r$.)

Panagrinėsime, kaip greitai sistema sugrįžta į stacionarų tašką, jeigu jį išvedame iš šios būsenos (perturbacija) (atsistato resursai, pelnas)

Linearizuojame lygtį stacionaraus taško ~~apl~~ atžvilgiu:

$$\frac{d(N-N_s)}{dt} \approx f'(N_s(E))\,(N-N_s)$$

$$= (E-r)(N-N_s).$$

$$\boxed{N(t)-N_s = e^{(E-r)t}\,(N(0)-N_s)}$$

$\boxed{E < r\,!}$

T_R (Recovery time) Atstatymo laikas yra laikas, per kurį perturbacijos dydis sumažėja $\frac{1}{e}$ ~~kartų~~ daugikliu.

$$e^{+(E-r)T_R} = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{e^{-(r-E)T_R} = e^{-1}}$$

$$\boxed{T_R(E) = \frac{1}{r-E}}$$

E - didėjant, T_R - auga.

$$T_R(0) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T_R\left(\frac{r}{2}\right) = 2\,T_R(0)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\tilde{E}_M}$$

Kadangi mes domina pelnas (derlius) Y, tai nagrinėkime $\tilde{T}_R(Y)$ f-ją.
(analizė Y atžvilgiu, kur Y - duomenys)

$$Y(E) = K\,E\left(1 - \frac{E}{r}\right) \qquad \boxed{\tilde{T}_R(Y) = T_R(E)}$$

$$Y_M = \frac{rK}{4} \qquad (\text{max reikšmė})$$

Sprendžiame kvadratinę lygtį.

$$Y = Y_M\,\frac{4}{r}\,E\left(1 - \frac{E}{r}\right) \qquad \overset{žr}{\Longrightarrow}$$

$$T_R(0) = \frac{1}{r} \qquad T_R(E) = \frac{1}{r-E}$$

$$\frac{\tilde{T}_R(Y)}{\tilde{T}_R(0)} = \frac{2}{1 \pm \left[1 - \frac{Y}{Y_M}\right]^{1/2}}$$

Kvadratinė lygtis:

$$\frac{Y}{Y_M} = \frac{4}{r} E \left(1 - \frac{E}{r}\right) = 4 \tilde{E} (1 - \tilde{E})$$

Pažymėkime: $\tilde{E} = \frac{E}{r}$

$$\boxed{\tilde{E}^2 - \tilde{E} + \frac{Y}{4 Y_M} = 0}$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{Y}{Y_M}} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - Y/Y_M}\right)$$

$$\frac{\tilde{T}_R(Y)}{\tilde{T}_R(0)} = \frac{1}{1 - \tilde{E}} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - Y/Y_M}}$$

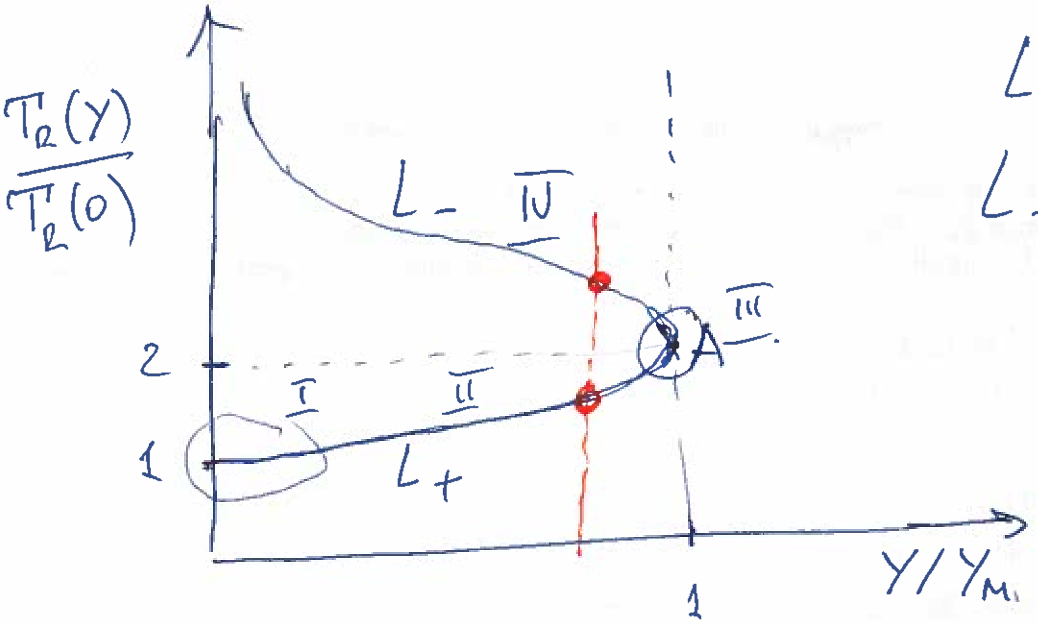
Nagrinėkime $\tilde{E}$ didinimą nuo 0 iki $\frac{r}{2}$

($\tilde{E}$ didinimą nuo 0 iki 1/2).

Tada $Y \Rightarrow Y_M$, ir $\frac{\tilde{T}_R(Y_M)}{\tilde{T}_R(0)} = 2.$

Judame kreive L_+

Paskui toliau didiname E (t.y. derliaus dalį)



L_+ – šaka +

L_- – šakos –

Aišku, kad naudinga sekti būti ant L_+ šakos ir pavojinga patekti ant L_- šakos

Panagrinėkime judėjimą ant šios histerezės kilpos

$$\boxed{N_s(E) = K\left(1 - \frac{E}{2}\right)}$$

Pradedame nuo mažos E reikšmės (mažas poreikis vartoti derlių)

Tada $N_s(E) \approx K$ ir $N_s(E) > \frac{K}{2} = N_M$,

kur N_M yra populiacijos dydis, kai gauname maksimalų derlių. Y_M.

Tada atsistatymo laikas $\boxed{T_R(E)/T_R(0) \approx 1}$

Didiname E. II sritis

Išlikiame ant L_+ ir derlius didėja

Pasiekiame $N_s(E) \approx \frac{K}{2}$ ir maksimalų

derlių Y_M (taškas A) $\overline{\underline{III}}$. $\overline{\underline{IV}}$

Jeigu ir toliau didiname E,

$Y < Y_M$ o

tai $\boxed{N_s(E) < \frac{K}{2}}$, ~~ats~~ sistemos

atsistatymo laikas toliau didėja,

bet jau esant L_- šaka!