Paskaita 1

Aibės, sąryšiai, funkcijos.

Ekvivalentumo sąryšis, faktoraibė.

Dalis medžiagos, su kuria pateikta Diskrečiosios matematikos modelyje!

Def Aibės sąvoka yra pirminė matematikoje

Mes laikysime aibe – visumą elementų, turinčių jiems įdomią savybę.

1. Aibė gali būti nurodyta, išvardinant jos elementus

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

2. Nurodome pirmą elementą (elementus) ir taisyklę kitiems elementams rasti

$$A = \{a_1 = 0, \ a_n = a_{n-1} + 4, \ n = 2, 3, \dots\}$$

$$A = \{a_1 = 1, \ a_2 = 1, \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 3\}$$

3. $A = \{x \mid P(x)\}$.

<u>Poaibio apibrėžimas</u> $\begin{pmatrix} \vee\text{- disjunkcija} \\ \wedge\text{- konjunkcija} \end{pmatrix}$

Def.

$\forall a \in A \Rightarrow a \in B$, tai $A \subset B$

(aibė A yra aibės B poaibis)

$\{a, b, c\} \subset \{a, e, b, d, c\}$

T1. $A \subset A$ (įrodykite)

T2. $\emptyset \subset A$ ($\emptyset$ - tuščia aibė)

T3. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.

Def. A ir B lygios, jei jos turi tuos pačius elementus.

Pav. $A = \{a, b, c\} = B = \{c, a, b\}$

T1. $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \equiv (A = B)$.

Def. Aibių A ir B skirtumu vadiname aibę tų A elementų, kurie nepriklauso B, žymime $A \setminus B$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$ (pašaliname bendrus elementus)

Pav. $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3, 6, 8\} = \{2\}$

Binariniai sąryšiai

Def. Aibių A ir B binariuoju sąryšiu vadinamas poaibis S

$$S \subset A \times B$$ (Dekarto sandauga)

$$(a, b) \in A \times B \equiv (a \in A) \wedge (b \in B)$$

Pav. $S \subset A^2 \quad (\equiv A \times A)$

$$I_A = \{(a, a);\ a \in A\}$$ Tapatumo sąryšis

$$U_{A \times B} = \{(a, b):\ \forall a \in A,\ \forall b \in B\}$$ Universalusis sąryšis

Funkcija

Def. Sąryšis $f \subset A \times B$ tarp aibių A ir B elementų vadinamas funkcija, jei

$$\big((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f\big) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

~~Def~~ Žym. $x f y, \quad (x,y) \in f, \quad y = f(x).$

Def. Funkcijos $f \subset A \times B$ apibrėžimo sritimi vadinama aibė

$y = f(x)$

$$D_f = \{x : x \in A \wedge (\exists y \in B)\ (x,y) \in f\}.$$

reikšmių sritimi vadinama aibė

$$E_f = \{y : y \in B \wedge (\exists x \in A)\ (x,y) \in f\}$$

Injekcija, siurjekcija, bijekcija

Def. $f \subset A \times B$ yra injekcija, jei

1) $D_f = A$, 2) $E_f \subset B$, 3) $((x,y) \in f) \wedge ((z,y) \in f) \Rightarrow x = z$

(t.y. $y \in E_f$ ~~gali būti~~ yra tik vieno elemento $x \in A$ vaizdas)

Def. $f \subset A \times B$ yra siurjekcija, jei

1) $D_f = A$, 2) $E_f = B$

(t.y. $\forall y \in B \ \exists$ bent vienas $x \in A$ pirmavaizdis)

Def. $f \subset A \times B$ yra bijekcija, jei ji yra ir injekcija, ir siurjekcija

1. $D_f = A$, 2. $E_f = B$ 3. $((x,y) \in f) \wedge ((z,y) \in f) \Rightarrow x = z$.

-6-

Pav. $f_1 = \{(x, \sin x),\ x \in \overset{A}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}},\ y \in \overset{B}{\overset{\shortparallel}{[-1,1]}}\}$

a) $(0,0) \in f_1$, $(\pi, 0) \in f_1$, bet $0 \neq \pi$,

tai f-ja nėra injekcija.

$D_f = \mathbb{R}$, $E_f = [-1, 1]$, bet f-ja f_1 yra siurjekcija.

$f_2 = \{(x, \sin x),\ x \in \overset{A}{\overset{\shortparallel}{[0, \frac{\pi}{2}]}},\ y \in \overset{B}{\overset{\shortparallel}{[-1, 1]}}\}$

yra injekcija, bet nėra siurjekcija

$f_3 = \{(x, \sin x),\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ y \in [-1, 1]\}$

yra bijekcija.

Pratybos

1) $y = \sin x$ $\quad B = [-2, 2]$, $\quad A = [0, \pi]$

2) $y = x^2$ $\quad B = [0, 9]$ $\quad A = [0, 3]$

Ekvivalentumo sąryšis.

Refleksyvumas, simetriškumas ir tranzityvumas

Def. ~~Sąryšis~~ Aibės A elementų sąryšis S

$S \subset A \times A$ vadinamas <u>refleksyviu</u>, jei

$(\forall a \in A)\,(a, a) \in S$ (Prisiminti sąryšį atvaizduoti matricos forma)

(kiekvienas elementas susietas su savimi). (diag $M = 1$.) (~~atv. matrica M~~ diag $M = 1$)

(Tiesių statmenumas nėra refleksyvus, ~~$m, n \in N$ dalumas~~ nėra refl.)

Def. $S \subset A \times A$ vadinamas <u>simetriniu</u>

$$\forall (a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S$$

(tiesių lygiagretumas, trikampių panašumas yra simetriniai sąryšiai

Sąryšis „mažiau" nėra simetrinis (matricų $M = M^T$) kalba

Def. $S \subset A \times A$ yra <u>tranzityvus</u>, jei

$$(\forall (a, b) \in S, (b, c) \in S) \Rightarrow (a, c) \in S$$

T. S yra tranzityvus $\Longleftrightarrow$ $S \circ S \subset S$ kompozicija

$\varphi \subset A \times B$, $\psi \subset B \times C$: $\varphi \circ \psi \subset A \times C$: ($\{(a, c) :\ \exists b \in B$ $(a, b) \in \varphi$, $(b, c) \in \psi$

Def. Aibės A elementų sąryšis, kuris yra refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus, vadinamas ekvivalentumo sąryšiu.

Tarkime, kad

Def. S yra ~~ekv~~ aibės A elementų ekvivalentumo sąryšis, o a yra kuris nors aibės A elementas ($a \in A$). Tai visų aibės A elementų, kurie susieti su a tuo sąryšiu S, vadiname ekvivalentumo klase ir žymime $[a]_S$ arba K_a (jei žinome apie kokį sąryšį S kalbame).

T. Bet kurios dvi ekvivalentumo klasės K_a ir K_b arba sutampa, arba neturi bendrų elementų.

$(a, x) \in S$

$$[a]_S = \{ x \in A : \cancel{\ldots} \}$$

$S(x) = a$

Įrodymas. a) Tarkime, ~~[illegible]~~ kad $(a,b) \in S$ (elementai a ir b yra susieti).

~~Tada~~ Imkime bet kurį $c \in K_a$, t.y. $(a,c) \in S$. Tada parodysime, kad ir $(b,c) \in S \Rightarrow c \in K_b$.

Kadangi $(a,b) \in S$, sąryšis S - simetrinis, tai $(b,a) \in S$. Bet sąryšis S yra tranzityvus, todėl iš

$$(b,a) \in S \text{ ir } (a,c) \in S \Rightarrow (b,c) \in S$$

Panašiai įrodome, kad, jei $c \in K_b \Rightarrow c \in K_a$.

Taigi šiuo atveju $\boxed{K_a = K_b}$

b) Tarkime, kad $(a,b) \notin S$

~~Ta~~ Bet egzistuoja $c \in A$, ~~toks~~ kad $c \in K_a$ ir $c \in K_b$. $(a,c) \in S$, $(b,c) \in S$. Tada iš tranzit. ir simetrijos gautume $(a,b) \in S$.

Gautume prieštaravimą prielaidai.

Def. Aibė klasių, į kurias suskirstoma aibė A pagal ekvivalentumo sąryšį S, vadinama **faktoraibe** ir žymima $A|S$.

Liekanų aritmetika

Ap. Imkime $m \in \mathbb{N}$. Sveikųjų skaičių $\mathbb{Z}$ sąryšis S:

$(x, y) \in S$, kai $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$x - y = m k$ (liekanų klasė
neo dalint m)

$x \equiv y \ (\mathrm{mod}\, m)$ žymėjimas

$m = 5$.

$$\mathbb{Z}|S = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3], [4]_5\}$$

$$[1]_5 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$