Paskaita 5

Grupių homomorfizmas, izomorfizmas

Pav. grupių (pratybom!)

1. $(\mathbb{Z},+)$ - grupė (~~be~~ Abelio)

2. $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ - Abelio grupė

3. $(\mathbb{N},+)$ - nera grupė (neturi e).

~~4.~~

T1 Kiekvienas grupės elementas a turi tik vieną jam simetrišką elementą a' (atvirkštinį, priešingą).

Įrodyti:

$aa_1'=e,\quad aa_2'=a_2'a=e \Rightarrow a_2'aa_1'=a_2'e$

$\underbrace{e\cdot a_1'}_{a_1'} = a_2'$

Uždav 1. Išspręskite lygtis

$a\circ x=b$ ir $y\circ a=b$

$a'\circ a\circ x=a'\circ b$ $\qquad \boxed{y=b\circ a'}$

$e\circ x$

$x \Rightarrow \boxed{x=a'\circ b}$

Ats. 2

T2. $\boxed{(a')' = a}$

~~$a'\circ a = e$ - def simetrinis elementas~~

$\cancel{(a')'\circ a' = e}$

$\boxed{a'\circ a = a\circ a' = e}$ def simetrinis a'

$a'\circ a'' = a''\circ a' = e$

$\Rightarrow (a')' = a$ nes tas elementas yra vienintelis

T3 $\boxed{(a_1\circ a_2)' = a_2'\circ a_1'}$

Patikriname ar $a_2'\circ a_1'$ yra simetrinis $a_1\circ a_2$.

◁ $(a_1\circ a_2)\circ a_2'\circ a_1'$

$= a_1\circ \underbrace{(a_2\circ a_2')}_{e}\circ a_1' = a_1\circ a_1' = e.$ ▷

Apibrėžkime naujas operacijas

$$a - b = a + b' = a + (-b)$$

$$a / b = a \cdot b' = a \cdot \cancel{\tfrac{1}{b}}\ b^{-1}$$

Jeigu grupė yra Abelio, tai (pažymėkime daugybos operacijos atveju) $\circ$ analogiškai ir $+$ atveju)

1) $(a/b) \circ (c/d) = (a \circ c) / (b \circ d)$

2) $(a/b)' = b/a$

3) $(a/b) \circ (c/d)' = (a \circ d) / (b \circ c)$

Įrodykite. 2) $(a/b)' \overset{def}{=} (a \circ b')'$

$$\overset{T3}{=} (b')' \circ a' \overset{T2}{=} b \circ a' \overset{def}{=} b/a$$

(Abelio grupės savybės nereikėjo)

1) $(a/b) \circ (c/d) = a \circ b' \circ c \circ d' \overset{Abel}{=} a \circ (c \circ b') \circ d'$

$$= (a \circ c) \circ (b' \circ d') \overset{Abel}{=} (a \circ c) \circ (d' \circ b')$$

$$\overset{T3}{=} (a \circ c) \circ (b \circ d)' = (a \circ c) / (b \circ d)$$

Dažnai turime labai panašios struktūros grupes, todėl išskiriame jų panašumo lygio (savybių)

Def Turime dvi grupes

$G_1 = (A_1, \circ_1)$ ir $G_2 = (A_2, \circ_2)$

Funkcija $f: A_1 \to A_2$ yra vadinama grupės G_1 homomorfizmu į grupę G_2, jei $\forall a, b \in A_1$ teisingos lygybės

1) $E_f = A_2$

2) $f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$.

Jeigu homomorfizmas G_1 į G_2 yra abipus vienareikšmis, tai jis vadinamas grupių G_1 ir G_2 izomorfizmu ($\exists$ ir f^{-}

...audgi jei f-ja f apibrėžia
...o dviejų grupių izomorfizmą, tai ji
yra bijekcija.

Pav. Nagrinėkime homomorfizmo pavyzdį.

$(1\mathbb{Z}, +)$ $\quad +_1 = +_2 = +$

$G_1 = (\mathbb{Z}, +)$ ir $G_2 = (3\mathbb{Z}, +)$

Abiejų grupių operacijos sutampa

$f : a \to 3a \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$

1) $E_f = 3\mathbb{Z}$

2) $f(a \overset{+_1}{+} b) = 3(a+b) = 3a \overset{+_2}{+} 3b = f(a) + f(b).$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$

Taigi ~~at~~ turime homomorfizmą.

Kadangi f yra bijekcija, tai turime ir izomorfizmą $3a \xrightarrow{f^{-1}} a$

n. 2. $G_1 = (\mathbb{R}, +)$ $\qquad G_1 \cong G_2$

$G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ $\qquad$ izomorfiškos

Izomorfizmą nusako f-ja $f(x) = \cancel{\lg x}\ \ln x$.

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad a, b \in \mathbb{R}_+$.

Izomorfizmo savybės:

1. Refleksyvumas $\qquad f(x) = x. \quad G_1 \cong G_1$
2. Simetriškumas $\qquad$ (nes f – bijekcija, tai ir atvirkštinė f^{-1} yra bijekcija)
3. Tranzityvumas

ekvivalentumo sąryšis

Pratybų užduotis

Tiesinių ~~transf~~ transformacijų aibė

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F = \{ f : f(x,y) = (ax + by,\ cx + dy),$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$f \circ g = g(f(x,y))$. Įrodyti, kad struktūra $(F, \circ)$ yra grupė.